**Exponenciální růst a dynamické produkční funkce**

Jiří Mihola[[1]](#footnote-1)

**Úvod**

Tyto základní teze vycházejí z návrhu projektu GAČR 2015/16 s názvem **Dynamický model znalostní ekonomiky s omezenými zdroji**. Výstupem tohoto projektu je, v návaznosti na existující matematický aparát teorie růstu a všeobecné rovnováhy, dynamický model znalostní ekonomiky s omezenými zdroji. Model používá obecnou statickou produkční funkce se synergickým efektem, vyjadřující podnikatelské volby, a definující klíčové body jejich využití. Dynamickou produkční funkci vytváří trajektorie klíčových bodů posunutých obecných produkčních funkcí vlivem použití intenzivních faktorů. Pro vyjádření podílu vlivu intenzivních faktorů na vývoj ekonomiky používá speciální dynamické parametry intenzity a extenzity. Tento model umožňuje řešení tak obecných otázek optimalizace ekonomiky, jako je vyhledání obecných optimalizačních podmínek vývoje znalostní ekonomiky a jejich zákonitostí. Může řešit otázky nedostatečnosti kritéria maximalizace zisku jako obecného kritéria optimalizace vývoje částí a celku ekonomiky. Jednou z otázek projektu je vysvětlení doposud nadproporciálního vývoje světové ekonomiky v kontextu s tradičně používanou podproporcionální produkční funkcí vyjadřující zákon klesajících mezních výnosů. Metodika je použitelná též při propočtech důsledků realizace reformních aktivit v různých oblastech.

Tento příspěvek reaguje především na následující témata koncepce 17. ročníku vědecké konference Lidský kapitál a investice do vzdělání:

- Vymezení společnosti produktivních služeb v kontrastu ke stávajícímu typu ekonomického růstu a společenského vývoje.

- Rozvoj inovačních schopností, zvyšování dynamiky inovací umožňujících "odpoutávat ekonomický růst od závislosti na omezenosti některých přírodních zdrojů.

**1 Exponenciální růst**

Pokud označíme produkt *y* a čas *t* vyjadřuje exponenciální růst exponenciální funkce

*y* = e *t*(1)

Definičním oborem produktu jsou nezáporná iracionální čísla *y* ≥ 0 a definičním oborem času *t* jsou nezáporná celá čísla tj. *t* = 0; 1; 2; 3; ….. ; *n*. Pro zjednodušení bude veličina t vyjadřovat roky. Prvních jedenáct hodnot této funkce, její první derivace a meziročního tempa růstu[[2]](#footnote-2) produktu jsou uvedeny v tabulce 1 a na názorném zobrazení grafu 1. Není překvapením, že exponenciální funkce roste mimořádně rychle. Pouze u exponenciální funkce je její derivace stejnou funkcí jako sama exponenciála tj. derivace jí nezměnila.

**Exponenciální funkce tabulka 1**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | y=et | y´=et | G(y) |
| 0 | 1 | 1 |  |
| 1 | 3 | 3 | 172% |
| 2 | 7 | 7 | 172% |
| 3 | 20 | 20 | 172% |
| 4 | 55 | 55 | 172% |
| 5 | 148 | 148 | 172% |
| 6 | 403 | 403 | 172% |
| 7 | 1097 | 1097 | 172% |
| 8 | 2981 | 2981 | 172% |
| 9 | 8103 | 8103 | 172% |
| 10 | 22026 | 22026 | 172% |

**Exponenciální funkce graf 1**

Exponenciální funkce se také vyznačuje tím, že meziroční tempo růstu je stálé rovno 172 %, což plyne z následujícího odvození:

(2)

Vzhledem k tomu, že krokem časové stupnice je 1 platí, že *t* =(*t*-1)+1 .

Tak prudkým růstem světový produkt neprochází, avšak lze snadno odvodit modifikovanou exponenciální funkci s nižším stálým tempem růstu např. 5 nebo 10 % meziročně. Takovou funkci získáme jako *a*-tou odmocninu z exponenciální funkce (1) jako

)1/a  =  (3)

Pro *a* = 20 získáme modifikovanou exponenciální funkci s meziročním tempem růstu produktu 5 %. Prvních 10 hodnot této funkce je uvedeno v tabulce 2.

**Modifikovaná exponenciální funkce tabulka 2**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | y=et/a | y´=(1/a)et/a | G(y) |
| 0 | 1,000 | 0,050 |  |
| 1 | 1,051 | 0,053 | 5% |
| 2 | 1,105 | 0,055 | 5% |
| 3 | 1,162 | 0,058 | 5% |
| 4 | 1,221 | 0,061 | 5% |
| 5 | 1,284 | 0,064 | 5% |
| 6 | 1,350 | 0,067 | 5% |
| 7 | 1,419 | 0,071 | 5% |
| 8 | 1,492 | 0,075 | 5% |
| 9 | 1,568 | 0,078 | 5% |
| 10 | 1,649 | 0,082 | 5% |

Na grafu 2 je zobrazena vedle této funkce též rychleji rostoucí funkce (červeně) s tempem růstu 10 % tj. pro *a* = 11. Rozsah zobrazení v grafu je zvětšen pro čas na t = 0 až 100 a obor funkčních hodnot y = 0 až 150. Jak je zřejmé z tabulky 2 derivace funkce (3) se nerovná původní modifikované exponenciále, nýbrž je v každém roce a-krát menší.

Konstantní meziroční tempo růstu např. 5 % plyne z pro a = 20 z následujícího odvození:

(4)

Nyní je možno porovnat tuto modifikovanou exponenciálu se skutečným vývojem světového produktu. Jako výchozí použijeme údaje o světovém vývoji HDP (PPP) per capita v $ za období od počátku letopočtu viz

<http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_regions_by_past_GDP_(PPP)_per_capita>

**Modifikovaná exponenciální funkce graf 2**

Údaje o vývoji počtu obyvatel planety za období od počátku letopočtu pochází z informačního zdroje:

<http://clanky.rvp.cz/wp-content/upload/prilohy/980/pracovni_list_c_4_vyvoj_poctu_obyvatel_sidla_venkovska_sidla.pdf>

**HDP (PPP) per capita v $ tabulka 3**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| [**World**](http://en.wikipedia.org/wiki/Earth) | 1 | 1000 | 1500 | 1600 | 1700 | 1820 | 1870 | 1913 | 1950 | 1973 | 2003 | pG(L) |
| **HPD/L** | 467 | 450 | 566 | 596 | 616 | 667 | 873 | 1526 | 2113 | 4091 | 6516 | 0,27% |
| **HPD/L** |  |  | 566 |  |  |  |  |  |  |  | 6516 | 0,49% |
| **HPD/L** |  |  |  |  |  |  |  |  | 2113 |  | 6516 | 2,15% |
|  | 1 | 1000 | 1500 | 1600 | 1700 | 1820 | 1870 | 1913 | 1950 | 1973 | 2003 |  |
| **L mld.** | 0,25 | 0,35 | 0,45 | 0,55 | 0,7 | 0,95 | 1,2 | 1,6 | 2,5 | 4 | 6,2 |  |
| **HDP mld.** | 117 | 158 | 255 | 328 | 431 | 634 | 1048 | 2442 | 5283 | 16364 | 40399 |  |

Tabulka 3 je doplněna výpočtem HDP v mld. $ . Poslední sloupec obsahuje výpočet průměrného meziročního tempa růstu při výpočtu za celé období 0 až 2003; 1500 až 2003 a 1950 až 2003. Následující 3 grafy ilustrují vývoj veličin z tabulky 3 tj. HDP/L; L a HDP=L.HDP/L:

**HDP (PPP) per capita v $ - svět graf 5**

**Počet obyvatel světa graf 3 HDP světa graf 4**

Ze srovnání exponenciálního vývoje v grafu 3 empirickým zjištěním vývoje na grafu 5 plyne, že skutečný vývoj HDP/L v čase je nerovnoměrný, tj. nelze jej modelovat křivkou se stálým meziročním přírůstem. Proto byly vybrány dva body skutečného vývoje a to rok *0* s *HDP/L*=467 a rok 2003 s *HDP/L*=6516. Produkční funkce má tvar:

*y* =a + b.e *t/c*(5)

Díky tomu, že funkce musí, podle zavedeného předpokladu, probíhat zmíněnými dvěma body je tím určena hodnota parametrů *a* a *b*, takže lze volit pouze parametr *c*. Pro *c* = 70, získáme hodnoty dané tabulkou 4 a průběh funkce daný grafem 5. Tabulka 4 obsahuje také derivaci této funkce a tempa růstu produktu G(y)

Graf 6 zobrazuje pro srovnání též červenou křivku téhož průběhu, avšak pro volbu parametru c = 200, takže si lze udělat představu o tom, jak lze tímto parametrem regulovat prohnutí křivky modelující světový vývoj HDP/L za období od počátku letopočtu.

**Modelování HDP/L tabulka 4**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| a= | 467 | [x0;y0] | [0;467] |
| b= | 2,00E-09 | [xn;yn] | [2003;6516] |
| c= | 70 |  |  |
| t | **a+b.et/c** | y´ | G(y) |
| 0 | 467 | 0 |  |
| 100 | 467 | 0 | 0,000% |
| 200 | 467 | 0 | 0,000% |
| 300 | 467 | 0 | 0,000% |
| 400 | 467 | 0 | 0,000% |
| 500 | 467 | 0 | 0,000% |
| 600 | 467 | 0 | 0,000% |
| 700 | 467 | 0 | 0,000% |
| 800 | 467 | 0 | 0,000% |
| 900 | 467 | 0 | 0,000% |
| 1000 | 467 | 0 | 0,000% |
| 1100 | 467 | 0 | 0,000% |
| 1200 | 467 | 0,001 | 0,000% |
| 1300 | 467 | 0,004 | 0,000% |
| 1400 | 468 | 0,016 | 0,003% |
| 1500 | 472 | 0,065 | 0,014% |
| 1600 | 486 | 0,273 | 0,056% |
| 1700 | 547 | 1,139 | 0,207% |
| 1800 | 800 | 4,755 | 0,594% |
| 1900 | 1856 | 19,84 | 1,073% |
| 2000 | 6262 | 82,79 | 1,330% |

Křivky na grafu 6 jsou na první pohled hladké, avšak derivace produktu (zde konkrétně *HDP/L*) a tempo růstu *G(y)* (přesně *G(HDP/L*) je až do roku 1100 prakticky nulová, načež začnou obě veličiny postupně narůstat. Průběh tempa růstu *G(HDP/L)* je zobrazen na grafu 7. Vidíme, že začíná významně narůstat v počátcích průmyslové revoluce a roste až do současnosti. Jeho růst se ale zmírňuje a ustálí se na průměrném meziročním tempu 1,4 %. Znalostní společnost může nastartovat obdobný proces.

**Modelování průběhu *HDP/L* graf 6**

**Tempo růstu *G( HDP/L)* graf 7**

**2 Produkční funkce**

Progresivní vývoj HDP/L není v souladu s běžně používanou produkční funkcí vyjadřující zákon klesajících mezních výnosů. Taková funkce sice roste, avšak stále pomaleji až přejde do absolutního poklesu představujícího přesycení technologického procesu určitým výrobním faktorem tak, že již produkce klesá. Viz např. graf 8.

**Produkční funkce s klesajícím mezním výnosem graf 8**

Produkční funkce vyjadřující zákon klesajících mezních výnosů byla součástí hospodářských úvah Xenofóna (428 – 354 př. n. l.) ve spisu *O státních příjmech* (Πόροι η περί προσόδων), která vyšla v roce 355 př. n. l.

V 18 stol. Se stejnou myšlenkou zabýval Baron de l´Aulne, francouzský národohospodář a úředník, ministr financí za Ludvíka VI., který se pokoušel uskutečnit myšlenky fyziokratizmu. Definoval tzv. výnosový zákon, který vyjadřuje ubývající výnos zemědělské půdy.

Anne Rober Jacques Turgot [tyrgo] (\*1727 Paříž, †1781 Paříž), vyjádřil zákon klesajících mezních výnosů v roce 1767 ve své stati *Úvahy nad textem Saint-Péravyho* takto: *Jestliže se zvýší použité množství jednoho výrobního faktoru (např. práce) při nezměněném využití (ceteris paribus) zbývajících výrobních faktorů (např. půda, kapitál) pak nejdříve roste, poté klesá.*

Na úrovni celé lidské populace se otázkou produkční funkce vyjadřující zákon klesajících mezních výnosů zabýval v Eseji o principu populace v roce 1793 Thomas Maltus (1766-1834). Na úrovni odvětví se zákonem klesajícího mezního výkonu zabýval ve své publikaci *Esej o vlivu nízkých cen obilí na výnosy akcií* David Ricardo (1772-1823).

Produkční funkce odpovídající vývoji znalostní společnosti musí obsahovat nadproporcionální oblast, která je oddělaná od tradiční podproporcionální části produkční funkce s klesajícím mezním výnosem, inflexním bodem. Inflexní bod představuje největší růst mezního produktu. Obvykle odpovídá optimální kombinaci výrobních faktorů. Pokud se bude jeden z nich zvyšovat, bude sice docházet k růstu avšak podproporcionálně. Stejně tak pokles jednoho z faktorů se projeví rychlým úbytkem produktu. V opačném směru je nadproporcionální část obvykle důsledkem působení synergických efektů mezi výrobními faktory. Nejvhodnější matematickou funkcí pro modelování takové produkční funkce se ukazuje polynomická agregátní produkční funkce n-tého stupně, která má pro podnikové vyjádření tvar

TR=a0+a1.TC+(a2/2!).TC2+(a3/3!).TC3+(a4/4!).TC4+⋯+(an/n!).TCn (3)

Jde o polynom n-tého stupně. a0; a1; a2; a3; a4; …… an jsou parametry produkční funkce. Skutečnost, že posouvání produkční funkce ve směru osy y nemá žádnou reálnou interpretaci, znamená, že a0 = 0. Pak lze získat vytknutím TC ve výrazu (4) rovnici,

TR=TC.( a1+a2/2!.TC+a3/3!.TC2+a4/4!.TC3+⋯+an/n!.TC(n-1) ) (4)

V této rovnici představuje výraz v závorce funkci efektivnosti Ef = f(TC) tj. výraz, který ukazuje, jak se mění v daném případě efektivnost, v závislosti na rostoucím množství souhrnného vstupu TC. Ukázalo se, že tvar produkční funkce je výsledkem mnohých dílčích optimalizací, spočívajících ve způsobech uplatnění jednotlivých výrobních faktorů (např. rovnoměrná zálivka všech disponibilních polí nebo optimální zálivka jen vybraných apod.). Vlastní produkční funkce zohleduje jak množství použitých výrobních faktorů, tak rozličné přírodní či jiné zákonitosti. Znalost a respektování těchto zákonitostí, které zkoumají jiné vědní disciplíny, je pro ekonoma a podnikatele klíčová.

**Polynomická produkční funkce čtvrtého stupně graf 9**

Produkční funkce, musí také respektovat existenci reálných minimálních jednotek výrobních faktorů. Na toto téma jsme publikovali statě o kvantované ekonomii (např. Mihola, Vlach, 2012). Podstatou podnikání je vybrat si takovou produkci, její rozsah, odpovídající technologii i distribuci, která nejlépe odpovídá poptávce, kterou podnikatel vhodným způsobem zjišťuje nebo stimuluje. Obecná produkční funkce pátého stupně je znázorněna na grafu 9 nebo se všemi svými derivacemi a izokvantami stálého zisku (varianta pro podnik) na grafu 10.

**Polynomická produkční funkce pátého stupně graf 10**

Na této funkci lze definovat na podnikové úrovni 4 klíčové body: maximálního mezního výnosu (červeně), maximální efektivnosti (tmavě zelená), maximálního zisku (světle zelená) a maximální produkce (modře). Obecně se dá říci, že čím jsou zdroje omezenější, tím větší jsou nároky na jejich efektivní využití, pročež je vhodné volit body stále více vlevo. Vhodnost volby je v rukou podnikatelů. Umístění jednotlivých bodů je znázorněno na grafu 11. Výpočet souřadnic jednotlivých bodů je ilustrován tabulkou 5.

**Příklad produkční funkce s vyznačením významných bodů tabulka 5**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **TC** | **TR** | **EP** | **Ef** | **MR** |
| 0,00 | 0,00 | 0,00 |  |  |
| 1,22 | 0,96 | -0,26 | 0,79 | 0,79 |
| 1,73 | 1,99 | 0,26 | 1,15 | 2,03 |
| 2,12 | 3,00 | 0,88 | 1,41 | 2,58 |
| 2,45 | 3,95 | 1,50 | 1,61 | 2,90 |
| **2,74** | **4,83** | 2,09 | 1,76 | **3,04** |
| 3,00 | 5,63 | 2,63 | 1,88 | 3,04 |
| 3,24 | 6,33 | 3,09 | 1,95 | 2,92 |
| 3,46 | 6,93 | 3,46 | 2,00 | 2,69 |
| **3,67** | **7,42** | 3,75 | **2,02** | 2,36 |
| 3,87 | 7,81 | 3,93 | 2,02 | 1,93 |
| **4,06** | **8,08** | **4,01** | 1,99 | 1,42 |
| 4,24 | 8,23 | 3,99 | 1,94 | 0,84 |
| **4,42** | **8,26** | 3,84 | 1,87 | 0,17 |
| 4,58 | 8,16 | 3,58 | 1,78 | -0,56 |
| 4,74 | 7,94 | 3,20 | 1,67 | -1,37 |
| 4,90 | 7,60 | 2,70 | 1,55 | -2,24 |

**Významné body produkční funkce graf 11**

**max. TR**

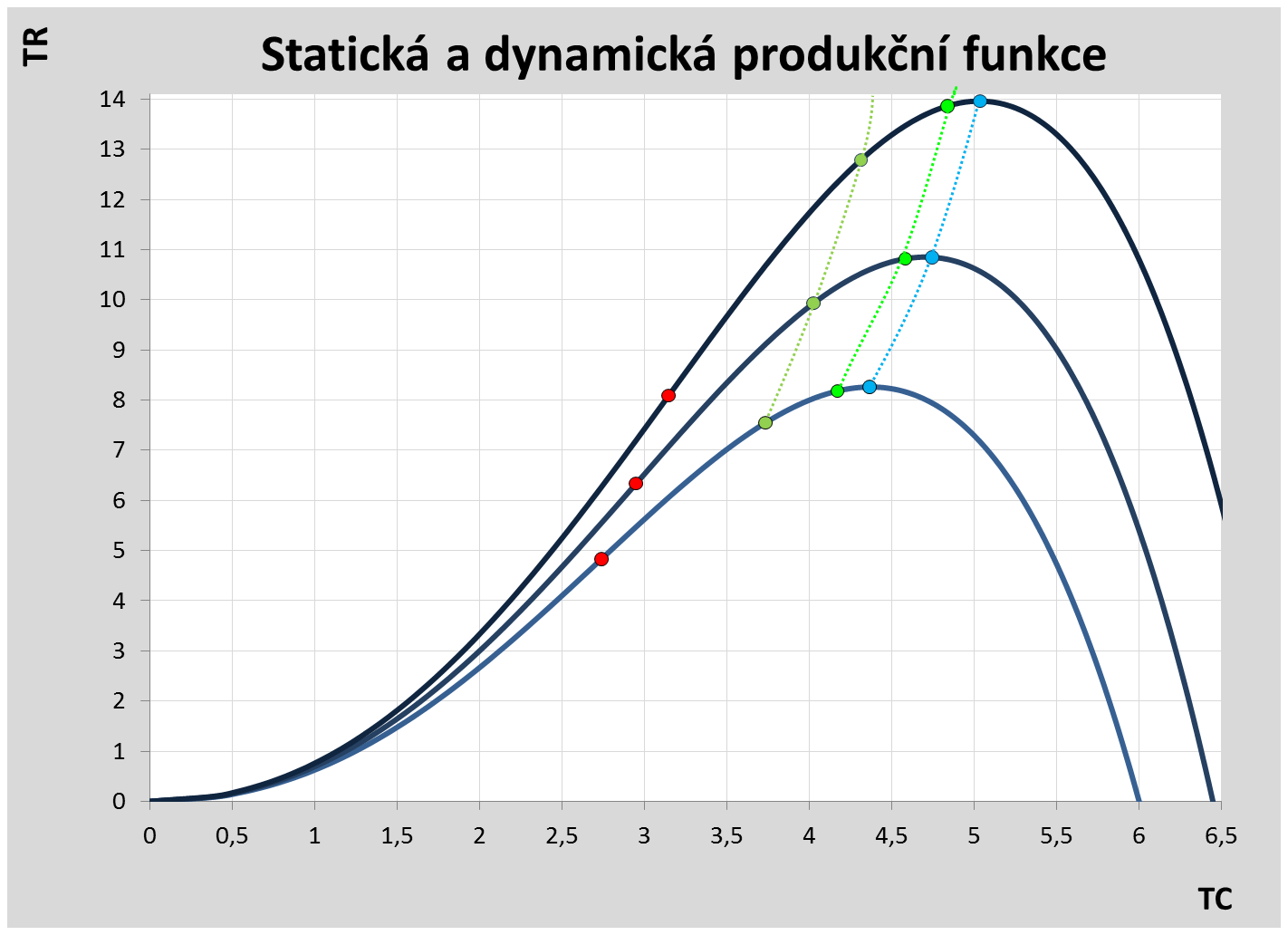
**max EP**

**max. Ef**

**max MR**

Vzhledem k tomu, že pozitivní progresivní vývoj se projevuje posuny statické produkční funkce, budou zkoumány trajektorie vývoje klíčových bodů, které představují dynamickou produkční funkci. Příkladem takového posunu produkční funkce je zobrazení na obrázku 12. Dvakrát posunutá funkce ukazuje jak jednotlivé body stejného významu (barvy) vytvářejí progresivní tvar dynamické produkční funkce.

**Posuny produkční funkce vlivem inovací graf 12**



Posouvání intenzivní[[3]](#footnote-3) produkční funkce zobrazuje v učebnici Makroekonomie I, VŠFS obrázek 3.1-­2 *Produkční funkce a technologický pokrok* (intenzivní ekonomický růst) na s . 49, kterou ukazuje obrázek 13. Tento graf ilustruje posun intenzivní produkční funkce směrem k vyšším produktivitám živé práce s tím, že výchozí bod [0, 0] se neposouvá. Technický pokrok je zde chápán jako jeden z nejvýznamnějších intenzivních faktorů vývoje.

Základní principy mezi statickou a dynamickou produkční funkcí jsou shodné na podnikové i agregátní tj. např. na národohospodářské úrovni. Přitom produkční funkce vyšších stupňů agregace jsou navíc ovlivněny také strukturou produkce daného agregátu.

**Posuny produkční funkce vlivem technického pokroku graf 13**



**2 Dynamická produkční funkce světového vývoje od počátku letopočtu**

Dynamická produkční funkce je vztah souhrnného imput faktoru *SIF* jako nezávisle proměnné a produktu *HDP*, jako závisle proměnné. Souhrnný imput faktor agreguje vhodným způsobem použité výrobní faktory. V nejjednodušším případě agreguje práci *L* a kapitál *K,* například pomocí multiplikativní agregace Coub-Douglasova typu. Pokud zvolíme váhy těchto faktorů shodné a přitom v součtu rovné jedné, půjde o geometrický průměr:

*SIF = √(K.L)*

(5)

Statická i dynamická agregátní produkční funkce vyjadřuje produkt jako funkci *SIF*:

(6)

*HDP =* ***f****(SIF)*

Proto, abychom získali z dosavadních údajů o jejich časovém průběhu dynamickou produkční funkci, potřebujeme znát např. časový průběh vybavenosti práce. Odhad tohoto průběhu vychází z toho, že v roce *0* byla vybavenost práce technikou *2* a v roce 2003 byla již *9000*. Křivka je sestrojena na podobném principu jako vývoj produktu daný vztahem (5), avšak parametr *c* =  380. Výsledný vývoj vybavenosti práce technikou zachycuje graf 14.

**Časový průběh vybavenosti práce ve světové ekonomice graf 14**

**Intenzivní světová produkční funkce graf 15**

Graf 14 a graf 6 umožňuje nakreslit intenzivní produkční funkci, která je zobrazena na grafu 15. Protože známe časový vývoj práce *L* (počtu lidí na Zemi) viz graf 3, může konečně nakreslit agregátní dynamickou produkční funkci světa, která je na grafu 16

**Dynamická produkční funkce světa graf 16**

Základním tvarem agregátní produkční funkce je vztah, který vyjadřuje, že vývoj produkce je dán v podstatě dvěma základními faktory:

* Změnou (nejčastěji zvětšováním) rozsahu souhrnných vstupů, byť navzájem různě substituovaných. Pokud dochází pouze k růstu tohoto faktoru a SPF se nemění, jde o čistě extenzivní vývoj.
* Změnou (nejčastěji zvětšováním) efektivnosti ekonomiky v podobě změn souhrnné produktivity faktorů SPF. Pokud dochází pouze k růstu tohoto faktoru a SIF se nemění, jde o čistě intenzivní vývoj.

*HDP = SPF . SIF*

(7)

Protože známe průběh funkce (6) můžeme zjistit, jak se na dynamické produkční funkci vyvíjí efektivnost tj. na národohospodářské úrovni souhrnná produktivita faktorů *SPF*. To umožňuje spočítat všechny potřebné dynamické charakteristiky zejména *SPF* a *SIF* např. koeficienty změny *I(SPF)* a *I(SIF),* které umožňují spočítat podíl vlivu intenzivních a extenzivních parametrů. K tomu využijeme dynamické parametry intenzity a extenzity a jejich časový průběh.

1. **Měření kvality vývoje trajektorií vývoje**

Pro řešení úlohy dynamické rovnováhy a vyjádření vlivů intenzivních faktorů na vývoj ekonomiky ve smyslu vývoje produktu *HDP* jsme odvodili speciální dynamické parametry vyjadřující kvalitu ekonomického vývoje. Hlavním smyslem této analýzy je hledání stimulů a aktivace tohoto progresivního a stabilního vývoje zabezpečující vedle výkonnosti ekonomiky též její zdokonalování a bezporuchovost. Tyto parametry jsou na rozdíl od doposud používaných metod velmi univerzální, neboť vyjadřují všechny případy poklesů, růstu, či stagnace produktu při souhlasném i kompenzačním působení intenzivních a extenzivních faktorů růstu. Použitá metodika řeší komplexně problematiku separability produkční funkce. Dynamické parametry intenzity a extenzity jsou odvozeny tak aby odpovídaly úplné typologii vývojů dané grafem 17

Pro vyjádření podílu vlivu intenzivních faktorů na vývoj výstupu deduktivně odvozeny dynamické parametry intenzity *i* a extenzity *e*

 (8)

 (9)

Elasticita je na izokvantách těchto dynamických parametrů konstantní.

**Typologie vývojů graf 17**

**čistě intenzivní**

**čistě extenzivní**

**čistě extenzivní pokles**

**čistě intenzivní pokles**

**intenzivní kompenzace**

**intenzivně extenzivní růst**

**intenzivně extenzivní pokles**

**extenzivní kompenzace**

Uvedené dynamické parametry lze použít všude tam, kde hledáme podíl vlivu změny množství a kvality (např. vliv času a rychlosti nebo vliv množství a ceny). Lze s nimi velmi úspěšně měřit např. elasticitu poptávkové nebo nabídkové křivky. Je prokázáno, že izokvanty elasticity a dynamického parametru vlivu změny cen nebo množství jsou shodné, avšak hodnoty těchto izokvant jsou v případě dynamických parametrů mnohem lépe interpretovatelné.

Vývoj intenzity a extenzity světového vývoje od počátku letopočtu je zachycen na grafu 18. Je z něj zřejmé, že významný nástup intenzivních faktorů odpovídá období průmyslové revoluce. Do té doby byl vývoj podstatně mírnější, takže význam dynamických parametrů byl při tomto nepatrném růstu produktu podstatně menší. Tento vývoj se blížil vývoji čistě extenzivnímu.

**Dynamické parametry intenzity a extenzity graf 18**

1. **Závěr**

Zkušenosti s národohospodářskými a podnikovými analýzami ukazují, že úlohou statické produkční funkce je vyjádřit technologické, fyzikální a přírodní možnosti dané produkce. Podnikatel pak volí, jaké množství výrobních faktorů bude navzájem kombinovat a jakým způsobem. Jeho volba by měla respektovat jak hledisko maximalizace zisku, tak co nejlepší využití vzácných zdrojů, které vede k intenzivnímu vývoji, který pak přináší jeho konkurence schopnost. Aplikace intenzivních faktorů včetně inovací se projevuje posouváním produkční funkce. Tento proces vytváří dynamické produkční funkce, na kterých je pak možno zaznamenat intenzivní vývoj, který pozorujeme ve vývoji progresivních společností.

V souhrnu je tímto způsobem možno analyzovat vývoje národních ekonomik, globálních ekonomických celků a světa jako celku. V rámci světa má většina podstatných ekonomických charakteristik (počet obyvatel, kapitál, hrubý domácí produkt) v čase vývoj podobný vývoji exponenciálnímu, avšak nikoliv s konstantním meziročním tempem rostu nýbrž s rostoucím tempem růstu až na určitou novou vyšší úroveň. Tento nástup růstu tempa je shodný s počátky průmyslové revoluce. Významné využívání intenzivních faktorů růstu lze dokumentovat odvozením časového průběhu podílu vlivu vývoje intenzivních faktorů na vývoj produktu.

Použitá metodika je použitelná pro analýzu dopadů uvažovaných reformních zásahů v různých oblastech ekonomiky.

**LiteratUra**

1. Cyhelský, L; Mihola, J; Wawrosz P. 2012. Quality indicators of development dynamics at all levels of the economy*. Statistika (Statistic and Economy Journal)* 49(2): 29 – 43.
2. Hájek, M.; Mihola, J. 2009. Analysis of total factor productivity contribution to economic growth of the Czech Republic. *Politická ekonomie (Political economy)* 57(6): 740-753.
3. Mihola, J. 2007. Aggregate Production Function and the Share of the Influence of Intensive Factors. *Statistika (Statistic and Economy Journal)* 44(2):108-132.
4. OECD 2010. *Ministerial Report on the OECD Innovation Strategy.* Paris: OECD.
5. OECD 2005. *The Oslo Manual for Measuring Innovation.* Paris: OECD.
6. SCHUMPETER, J. A. 1934. Theory of Economic Development. Cambridge (Ma): Harvard University Press.
7. Solow, R. 1957. Technical change and the aggregate production function*.* *Review of Economics and Statistics* 39(3): 312-320.
8. SÖRLIN. S.; VESSURI, H. (editors) 2011. Knowledge Society vs. Knowledge Economy: Knowledge, Power, and Politics. Hampshire: Palgrave Macmillam.
9. STEHR, N. 1994. Knowledge society. Thousand Oaks: Sage Publications.
10. STEHR, N.; BÖHME, G. The Knowledge Society: The Growing Impact of Scientific Knowledge on Social Relations. Heidelberg: Springer.
11. SYNEK, M.; KISLINGEROVÁ, E. 2011. Podniková ekonomika. 5. Vydání. Praha: C.H. Beck.
12. WAEGEMANN, P. 2012. Knowledge Capital in the Digital Society. New York: CreateSpace.
13. WÖHE, G.; KISLINGEROVÁ, E. 2007. Úvod do podnikového hospodářství. Beck Praha.

**V posledních dvou letech bylo na dané téma publikováno:**

WAWROSZ, Petr; MIHOLA, Jiří 2013.  The Share of Extensive and Intensive Factors on GDP Development of Selected EU Countries. European Scientific Journal. ESJ December 2013, SPECIAL edition Vol.1.

WAWROSZ, Petr; MIHOLA, Jiří 2013. „Development Intensity of four Prominent Economies “. Statistika (Statistics and Economy Journal). Vol. 93, No. 3, pp. 26-40.

WAWROSZ, Petr; MIHOLA, Jiří 2013. „Analysis of the share of the extensive and intensive factors on changes of the output on all level of the economy“. Discussion on Estonian Economic Policy. Vol. 21. No. 1, pp 85-102.

WAWROSZ, Petr; CYHELSKÝ, LUBOMÍR; MIHOLA, JIŘÍ 2012. „Quality Indicators of Economic Development at All Level of the Economy“. Statistika (Statistics and Economy Journal). Vol. 49, No. 2, pp. 29-43.

WAWROSZ, Petr; TURKOVÁ, Ivana 2013. „Analýza intenzity vývoje společnosti Nu Skin“. Trendy v podnikání 2013 Recenzovaný sborník příspěvků mezinárodní vědecké konference. Plzeň: Ekonomická fakulta Západočeské Univerzity.

WAWROSZ, Petr; MIHOLA, Jiří 2013. „Kvalita trajektorie vývoje vybraných zemí EU   
(Analýza dvacetiletých trajektorií vývoje deseti vybraných zemí EU)“. Conference Proceedings from 11th International Scientific Conference “Economic Policy in the European Union Member Countries”, September 18–20, 2013, Velké Karlovice, Czech Republic. Ostrava: Ekonomická fakulta, Technická univerzita Vysoká škola báňská.

WAWROSZ, Petr; MIHOLA, Jiří 2013. “ Podnikové trajektorie vývoje znalostí společnosti. (Porovnání vývoje 7 významně inovativních firem USA“. Sborník zmezinárodní vědecké konference znalosti pro tržní praxi 2013 (Veřejná ekonomika – současnost a perspektiva).  Olomouc: Universita Palackého.

WAWROSZ, Petr; MIHOLA, Jiří 2013. “ Are US innovative companies really process innovative?” Proceedings of 8th Workshop on Knowledge Management. Bratislava: Vysoká škola manažmentu.

KOTĚŠOVCOVÁ, Jana; MIHOLA, Jiří 2013.  „Konkurenční výhoda podniků s intenzivní trajektorií vývoje.“  Mezinárodní konference Ekonomické univerzity v Bratislavě, Fakulta podnikového manažmentu, Katedra podnikání a managementu, 15. 4. 2013, sborník ISBN 978-80-225-3636-3

KOTĚŠOVCOVÁ, Jana; MIHOLA, Jiří 2013. „ Odpovídá vývoj ŠKODA AUTO znalostní společnosti?“  Mezinárodní konference Ekonomické fakulty Západočeské univerzity v Plzni, 14. A 15. 11. 2013

KOTĚŠOVCOVÁ, Jana; MIHOLA, Jiří 2013. „ Kvalita trajektorie vývoje podniků ve znalostní ekonomice“  Mezinárodní konference Hradecké ekonomické dny 2014, Fakulta informatiky a managementu Univerzity Hradec Králové, 4. a 5. 2. 2014

**Starší publikace autora v dané oblasti:**

Dosavadní články:

v časopise **Statistics and Economy Journal** 49(2)/2012;

***Quality indicators of Development Dynamics at All Levels of the Economy***

ke stažení na <http://www.czso.cz/statistika_journal>

v časopise **Politická ekonomie** 6/2009

***Analýza vlivu souhrnné produktivity faktorů na ekonomický růst České republiky***

lze stáhnout na

<http://www.median-os.cz/data/nspdf1.pdf>

v časopise **Statistika**

* 6/2008; **Udržitelný růst – analýza České republiky.**
* 5/2008; **Udržitelný růst – matematický aparát.**
* 6/2007; **Souhrnná produktivita faktorů – přímý výpočet.**
* 2/2007; **Agregátní produkční funkce a podíl vlivu intenzivních faktorů.**
* 5/2006; **Metodické přístupy ke konstrukci souhrnných ukazatelů.**

jsou ke stažení na

<http://panda.hyperlink.cz/cestatxt/minule.htm>

V Praze dne 28. 4. 2014

1. Ing. Bc. Jiří Mihola, CSc., Vysoká škola finanční a správní v Praze, Fakulta ekonomická, Katedra ekonomie a mezinárodních vztahů, spoluautorský podíl 100%, výstup je součástí projektu IGA VŠFS č. 7427 [↑](#footnote-ref-1)
2. Tempo růstu je relativní přírůstek vyjádřený v %. = . Definiční obor G(y) ≥ -100 % [↑](#footnote-ref-2)
3. Intenzivní produkční funkce je vztahem mezi vybaveností práce technikou K/L jako nezávisle proměnné a produktivitou živé práce Y/L jako závisle proměnné. [↑](#footnote-ref-3)